

1. Rozhodněte, která z následujících funkcí je charakteristickou funkcí nějaké reálné náhodné veličiny a své rozhodnutí stručně zdůvodněte.

(a) $f_1(t) = \frac{1}{(1-it)^2} \frac{1}{(1+it)^2} \cos(2t) \frac{\sin t}{t}$

(b) $f_2(t) = \frac{1}{2} e^{it^2} + \frac{1}{2} e^{it-|t|}$

(c) $f_3(t) = \max\{e^{-t^2}, \cos(t)\} \exp\{e^{it} - 1\}$

(d) $f_4(t) = \frac{1+\cos(\sqrt{|t|})}{2} e^{-it}$

(e) $f_5(t) = \exp\{-it - 2|t| - 3t^2 + e^{it} + \cos^2(t) + \frac{1}{2-e^{-|t|}} - 3\}$.

2. Necht' $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením $R(0, n^2)$.

(a) Rozhodněte o sčítatelnosti skoro jistě následující řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{X_k} - k}{k^{5/2}}.$$

(b) Rozhodněte o konvergenci skoro jistě následující posloupnosti a určete její limitu

$$Y_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{X_k}{k}}.$$

3. Necht' $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou n^3 . Rozhodněte o konvergenci v distribuci následující posloupnosti a najděte případné limitní rozdělení

$$Z_n = \frac{1}{n^{5/2}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k^2 - EX_k^2}{k^4}.$$